

## התפתחות תבניות במערכות תנודתיות מאולצות מחזורית

### תקציר

מערכות תנודתיות הן חלק בלתי נפרד מחיינו, ניתן לראות פעולתן למשל בשעונים פשוטים או בהתקנים טכנולוגיים מתקדמים יותר כמו מכשירי ניווט או קוצבי-לב. גם בביולוגיה ואקולוגיה קיים ביטוי למגוון רחב של התנהגויות מחזוריות כגון תפרחות עונתיות של פרחים, יחסים של טורף-קורבן או חלוקת תאים. במערכות בקנה מידה גדול (יחסית לאורכים אופייניים שעל פני כדור הארץ), ניתן לזהות בפשטות כי כדור הארץ מקיף את השמש בזמן מחזור של כשנה (365 ימים). כמו כן, משוער כי גלקסיות מבצעות תנועה סיבובית מחזורית סביב חור שחור השרוי במרכזן. גם במערכות בקנה מידה קטן, ניסוחים קוונטים של חלקיקי יסוד, שדה אלקטרומגנטי וגבישים מבוססים על התנהגות תנודתית. חשיבותן המדעית של מערכות תנודתיות מעודדת במשך השנים עבודות עיוניות כלליות מחד גיסא ומחקרים הנוגעים באופן ישיר למערכות פיסיקליות, כימיות, ביולוגיות, אקולוגיות ואפילו אקונומיות מאידך.

תחת אילוץ מחזורי בזמן, מערכות תנודתיות יכולות להראות תאום בו-זמני (entrainment) או נעילת תדירויות (frequency locking). מערכת אשר מתאימה את תדירותה ליחס של שבר תדירות האילוץ, נחשבת לנעולת תדירות. אזור התהודה, תחום בו מתקיימת נעילת תדירויות, מקבל צורה דמוית לשון במישור תדירות ועוצמת האילוץ. תופעת נעילת התדירויות נחקרה רבות בהקשר של מתנדדים בודדים אך כמעט שלא נחקרה עבור תווך מתנווד (רצף מרחבי של מתנדדים).

עבודת מחקר זו עוסקת בתופעת נעילת תדירויות בתווך מתנווד ובהשפעה של תבניות מרחביות על תופעות תהודה. אנו חוקרים את המנגנונים ותחומי הפרמטרים בהם תבניות תהודה ואי-תהודה מתפתחות. התוצאות מראות, בין היתר, כי:

(א) רק תבניות של גלים עומדים (ללא התחשבות בתנודות אחידות) עומדות בקנה אחד עם תנאים עבור נעילת תדירויות: כל נקודה במרחב יכולה להתנדנד בתהודה או לא.

(ב) אי-יציבויות מרחביות יכולות להגדיל או להקטין את לשונות התהודה של מתנד בודד, כך שתחום התהודה עבור מתנד בודד אינו בהכרח זהה לתחום התהודה בתווך מתנווד.

המוטיבציה לעבודה מתבססת על ניסיונות מעבדה שבוצעו לאחרונה בתגובה כימית, מאולצת בזמן, מסוג בלוזוב-ז'בוטינסקי. בניסיונות נצפתה התפתחות של תבניות גלים-עומדים מגלי ספירלה, כאשר תדירות האילוץ ווסתה לכפעמים תדירות המערכת (להלן תהודה 1: 2). כמו כן נמצא שהגלים-העומדים מתפתחים רק בחלק מתחום התהודה 1: 2. בנוסף, הניסיונות הראו היווצרות תבניות מבוך של גלים-עומדים בשני מנגנונים שונים. תבניות מבוך יכולות להתפתח על ידי אי-יציבות של חזית גל המפתחת "אצבעות" או על ידי התפשטות פסים בתוך תווך מתנווד. בשני המקרים התבניות הנוצרות מתאפיינות בשני מצבים נעולי תדירות, המתנדנדים במופע יחסי של  $\pi$ .

המחקר מתבסס על משואת גינצבורג-לנדאו מרוכבת המכילה בנוסף איבר אילוף מחזורי. משוואה זו היא תבנית נורמלית (Normal Form) עבור משרעת התנודות, ומתארת תווך מרחבי תנודתי העובר אי-יציבות הופף (Hopf) לתנודות אחידות כאשר תדירות האילוף הנה בערך כפליים מתדירותה הטבעית של המערכת (ללא האילוף). האנליזה התאורטית כוללת חקר אי-יציבות ליניארית של פתרונות אחידים, אנליזה לא-ליניארית, וחישובים נומריים. התוצאות נבחנו כנגד פתרונות נומריים ישירים של משואת גינצבורג-לנדאו המרוכבת, ונמצאה התאמה טובה.

פתרונות נייחים של משואת גינצבורג-לנדאו המרוכבת מתארים מצבי תהודה. למשוואה פתרונות נייחים אחידים ופתרונות נייחים המתארים תבניות פסים או מבוך. הפתרונות האחידים יוצרים אזור דמוי-לשון במישור הפרמטרים הנפרש על ידי תדירות האילוף והמשרעת שלו. בצדה האחד של הלשון, הגבול בו מופיעות תבניות תהודה נקבע על ידי סף אי-יציבות של חזיתות גל נייחות (איזינג) לחזיתות גל נעות (בלוך). אי יציבות זאת מסמנת את הגבול בין תבניות נייחות לתבניות גלים נעים. גלים נעים הורסים את התהודה מפני שכל נקודה במרחב נתונה לשינויי מופע הנובע מחזיתות נעות. בצדה האחר של הלשון, קיום אי-יציבות טיורינג (Turing) משנה, מגדיל או מקטין את גבולות התהודה. תבניות תהודה של הגלים-העומדים יכולות להיווצר מחוץ ללשון התהודה של פתרונות אחידים בעוד שתבניות אי-תהודה של גלים-עומדים יכולות להתפתח בתוך הלשון. אנליזה לא-ליניארית של משואת גינצבורג-לנדאו המרוכבת ליד אי-יציבות הופף-טיורינג (Hopf-Turing) נותנת את אזורי הקיום והיציבות עבור תבניות הגלים-עומדים.

בנוסף, חקר של משואת גינצבורג-לנדאו המרוכבת משחזר את שני המנגנונים בהם תבניות מבוך מתפתחות כנצפה בניסוי. אי-יציבות של "אצבעות" מתייחסת לאי-יציבות רוחבית של חזית גל נייחת בתוך לשון התהודה בעוד שהתפשטות פסים מיוחסת לפלישה של פתרון פסים נייח (פתרון תהודה) לתוך פתרון תנודות (פתרון אי-תהודה). מנגנונים אלו נמצאים באזור זהה, במישור הפרמטרים, לזה שנצפה בניסוי - ליד גבולה הימני העליון של לשון התהודה. כמו כן, נמצא מנגנון שלישי שדרכו תבניות מבוך יכולות להתפתח: תבניות מבוך של גלים-עומדים יכולות להיווצר בתחום צר ליד אחד גבולות הלשון מאי-יציבות טיורינג של מצבי התהודה האחידים המתקיימים בתוך הלשון.

#### **מילות מפתח:**

מערכות תנודתיות, דינמיקה לא ליניארית, התפתחות תבניות, תאום בו-זמני, נעילת תדירויות, תהודה, משוואות דיפרנציאליות חלקיות, יריעה מרכזית, תבניות נורמליות, משוואות מעטפת (משרעת), חקר יציבות, ערכים עצמיים, ביפורקציות, אי-יציבויות שניוניות, משואת גינצבורג-לנדאו המרוכבת, חזיתות גל, גלים עומדים, גלי ספירלה, אנליזה נומרית.